



Ασάφεια (Fuzziness)

- Έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε *μη-ακριβή* (imprecise) δεδομένα.
- Π.χ. «*Ο Νίκος είναι ψηλός*»: δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια το ύψος, αλλά μπορούν να ληφθούν ορισμένες αποφάσεις για θέματα σχετικά με το ύψος του Νίκου.
- Το πρόβλημα δεν οφείλεται τόσο στις έννοιες που χρησιμοποιούνται όσο στην αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών.



Ασάφεια-Παραδείγματα

- Αν θεωρηθεί ότι ψηλός είναι όποιος έχει ύψος πάνω από 1.95 μέτρα, είναι απόλυτα σωστό να θεωρηθεί ότι κάποιος με ύψος 1.94 δεν είναι ψηλός;
- Η ασάφεια είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό της γλώσσας.
- Η *ασαφής λογική (fuzzy logic)* είναι ένα υπερσύνολο της κλασσικής λογικής, η οποία έχει επεκταθεί έτσι ώστε να μπορεί να χειριστεί τιμές αληθείας μεταξύ του «απολύτως αληθούς» και του «απολύτως ψεύδου».
- *Θεωρία Ασαφών Συνόλων (Fuzzy Set Theory)*-Lofti Zadeh '60



Ασαφή Σύνολα

- Σύνολα

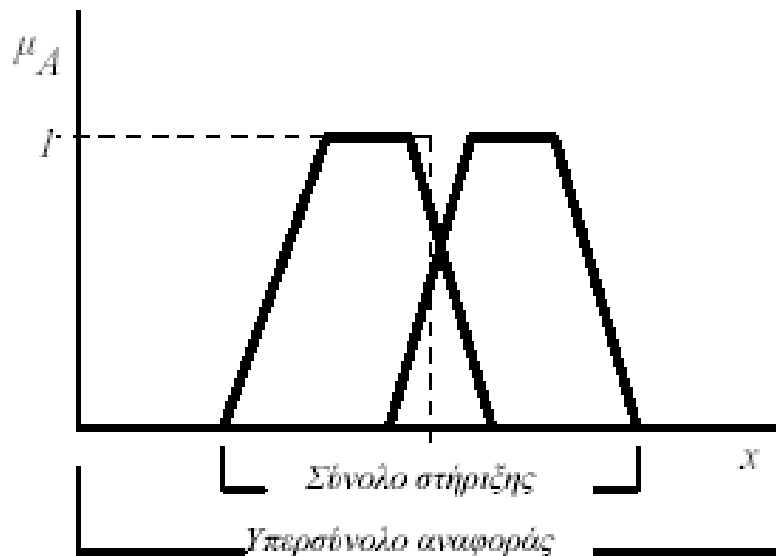
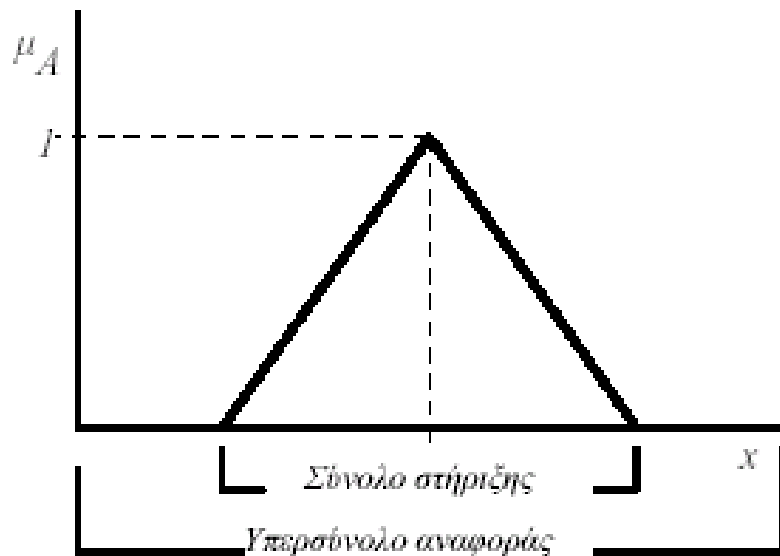
- Ένα στοιχείο είναι μέλος ή όχι
- Αληθές ή ψευδές είναι οι μόνες δυνατότητες

- Ασαφή Σύνολα

- Ένα αντικείμενο μπορεί να ανήκει μερικώς σε ένα σύνολο
- Ο βαθμός συμμετοχής στο σύνολο ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής (membership function $f(x)$)
- $f(x)=0$ το αντικείμενο δεν ανήκει στο σύνολο
- $f(x)=1$ είναι σίγουρα μέλος του συνόλου
- Οι υπόλοιπες τιμές για την $f(x)$ δείχνουν το βαθμό συμμετοχής

Ασαφή Σύνολα

Η ασάφεια μπορεί να εισαχθεί στη θεωρία των συνόλων, αν γενικευτεί η χαρακτηριστική συνάρτηση για να λαμβάνει άπειρο αριθμό τιμών στο διάστημα $[0, 1]$.



Παραδείγματα τριγωνικού και τραπεζοειδών ασαφών συνόλων

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

Ασαφές Σύνολο (fuzzy set) A : ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, u_A(x))$ όπου x ανήκει X και $u_A(x)$ ανήκει $[0,1]$.

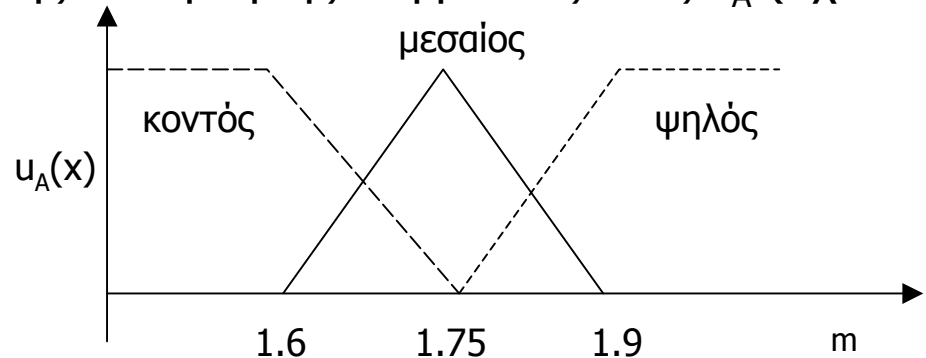
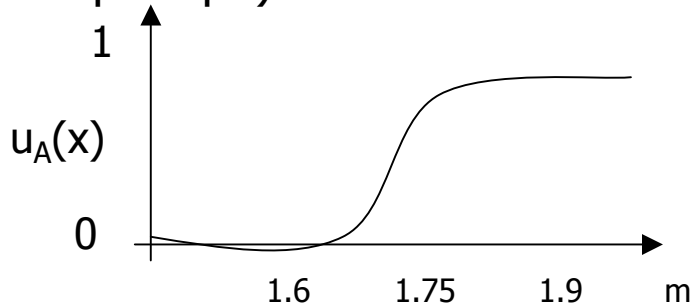
Η τιμή $u_A(x)$ λέγεται *βαθμός αληθείας (degree of truth)*, συμβολίζει το βαθμό της συγγένειας του x στο A και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

- Η συνάρτηση $u_A(x)$ ονομάζεται συνάρτηση συγγένειας (membership function) και στην πράξη μπορεί να προέρχεται από:
 - Υποκειμενικές εκτιμήσεις
 - Προκαθορισμένες και απλοποιημένες μορφές
 - Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
 - Φυσικές μετρήσεις

Η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασσική, όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συγγένειας είναι μόνο 0 ή 1.

Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων

- Μέσω της αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης συγγένειάς τους μ_A (σχ. αριστερά)



- Απλούστευση: τμηματικώς γραμμική απεικόνιση της συνάρτησης συγγένειας (σχ. δεξιά).
- Σύνολο ζευγών της μορφής $\mu_A(x)/x$ όπου x είναι το στοιχείο του συνόλου και $\mu_A(x)$ είναι ο βαθμός συγγένειάς του:
- Π.χ. Ψηλός = $\{0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95\}$
- Με ζεύγη της μορφής $(x, \mu_A(x))$:
- Π.χ. Ψηλός = $\{(1.7, 0), (1.75, 0), (1.8, 0.33), (1.85, 0.66), (1.9, 1), (1.95, 1)\}$
- **Διαφορά:** η αναλυτική έκφραση περιγράφει συνεχείς τιμές ύψους ενώ το Σύνολο Ζευγών περιγράφει μόνο κάποια συγκεκριμένα ύψη στο διάστημα ορισμού της $\mu(x)$

Συνάρτηση Συμμετοχής

Το *σύνολο στήριξης* (*support set*) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο των στοιχείων του υπερσυνόλου αναφοράς X για το οποίο $u_A(x) > 0$. Ένα ασαφές σύνολο ουσιαστικά είναι η απεικόνιση του συνόλου στήριξης στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Ως παράδειγμα, η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου $A = \{\text{χαμηλή}\}$ στο υπερσύνολο αναφοράς των θετικών ακέραιων αριθμών από $[0,100]$ που αναφέρεται σε θερμοκρασία μπορεί, εναλλακτικά να έχει διακριτές τιμές, όπως:

$$u_A(0) = u_A(5) = u_A(10) = u_A(15) = u_A(20) = 1,0$$

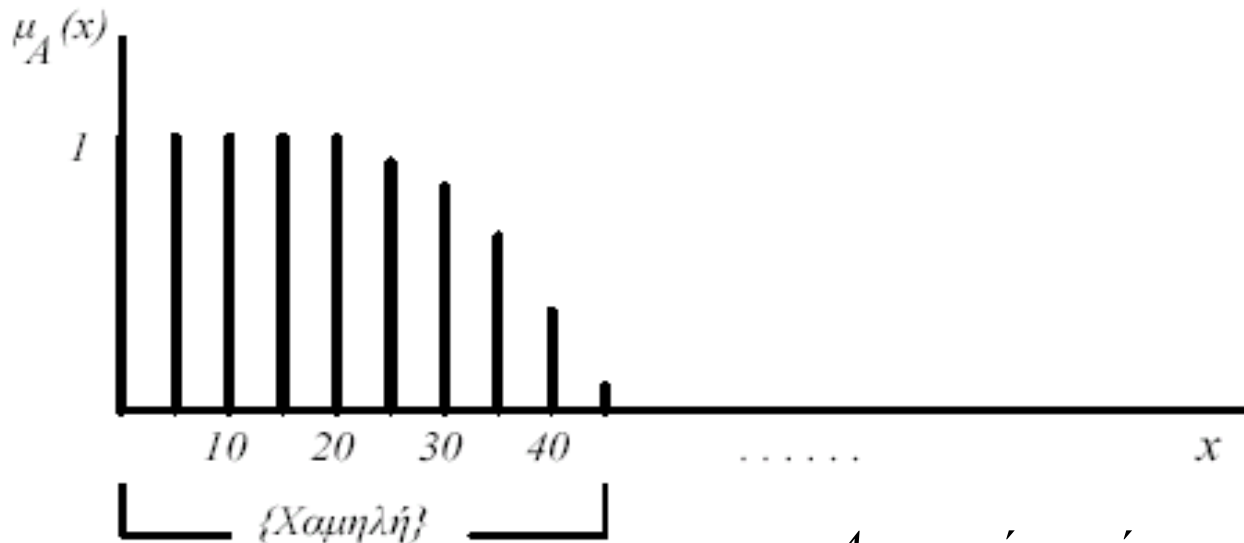
$$u_A(25) = 0,9 \quad u_A(30) = 0,8 \quad u_A(35) = 0,6 \quad u_A(40) = 0,3 \quad u_A(45) = 0,1$$

$$u_A(50) = u_A(55) = \dots u_A(100) = 0.$$

Παράδειγμα Συνάρτησης Συμμετοχής

Επίσης μπορεί εναλλακτικά να εκφραστεί ως το διακριτό ασαφές σύνολο:

$$\begin{aligned} u_A(x) = \{ & 1|0 + 1/5 + 1|10 + 1|15 + 1|20 + 0,9/25 + 0,8|30 + \\ & 0,6|35 + 0,3|40 + 0,1|45 + 0|50 + 0/55 \\ & + \dots \quad 0|100 \} \end{aligned}$$



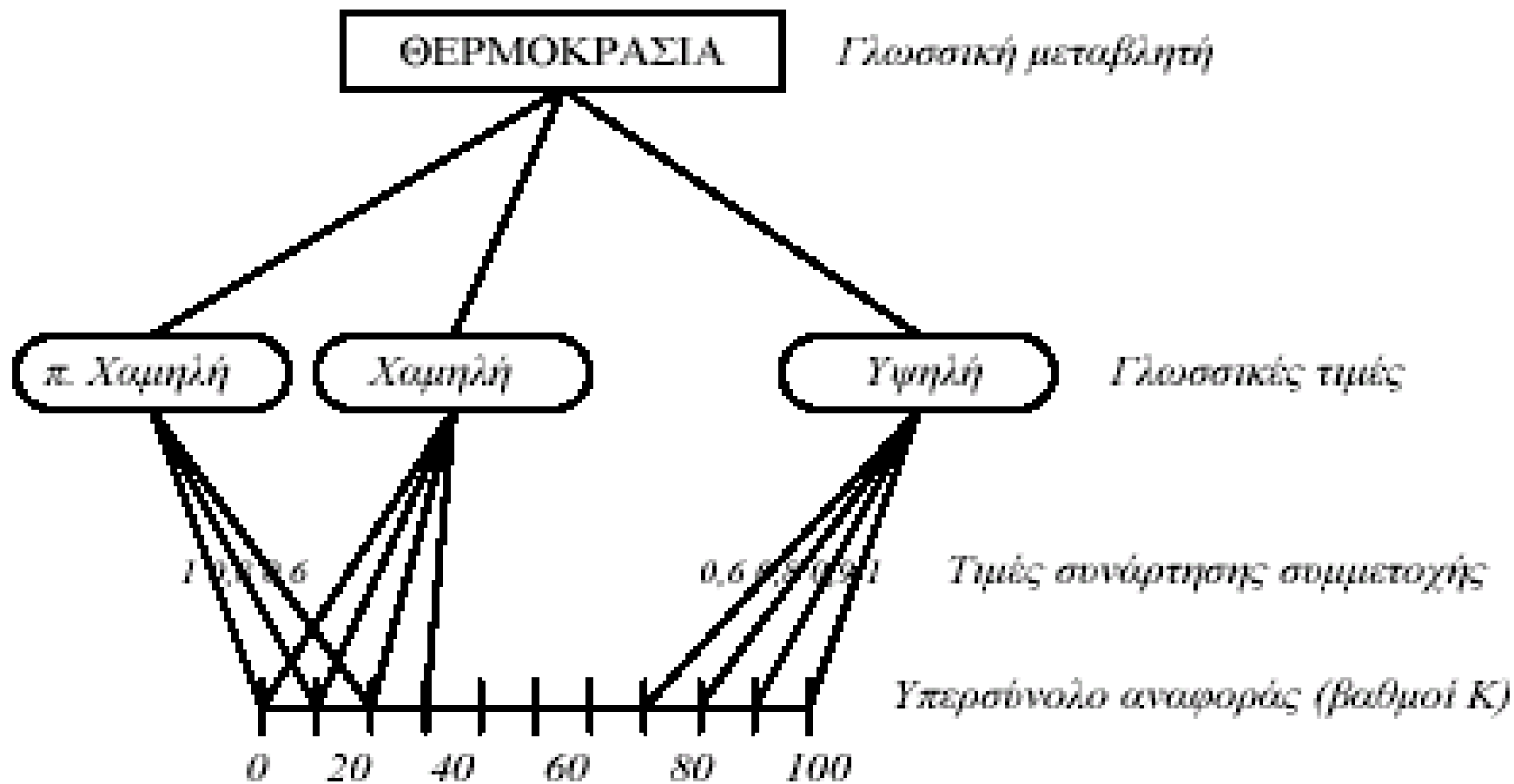
Διακριτή συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου $A = \{\text{Χαμηλή}\}$



Λεκτικές Μεταβλητές

Γενικότερα, οι τιμές μιας ασαφούς μεταβλητής μπορεί να είναι προτάσεις σε κάποια προδιαγεγραμμένη γλώσσα με συνδυασμό ασαφών μεταβλητών, λεκτικών περιγραμμάτων (*linguistic descriptors*) και υπεκφυγών (*hedges*). Οι τιμές της μεταβλητής ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ του παραδείγματος μπορούν έτσι να εκφραστούν ως *Υψηλή, όχι_Υψηλή, σχετικά_Υψηλή, όχι_πολύ_Υψηλή, πάρα_πολύ_Υψηλή, αρκετά_Υψηλή* κ.ά. δηλαδή με προτάσεις αποτελούμενες από την ετικέτα *Υψηλή*, την άρνηση *όχι*, τα συνδετικά *και* άλλα καθώς και τα περιγράμματα *πολύ, σχετικά, αρκετά* κ.ά. Κατά τον τρόπο αυτό η μεταβλητή ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ είναι μια λεκτική μεταβλητή.

Λεκτική Μεταβλητή- ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ



Τελεστές Ασαφούς Λογικής

Οι τελεστές \min και \max δύο στοιχείων α και β ορίζονται ως:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \min(\alpha, \beta) = \alpha \text{ αν } \alpha \leq \beta \\ &= \beta \text{ αν } \alpha > \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \vee \beta &= \max(\alpha, \beta) = \alpha \text{ αν } \alpha \geq \beta \\ &= \beta \text{ αν } \alpha < \beta\end{aligned}$$

παραδείγματα των παραπάνω είναι οι λογικές πύλες Ή (OR) και ΚΑΙ (AND)

		β	
		0	1
α	0	0	1
	1	1	1

		β	
		0	1
α	0	0	0
	1	0	1



Πράξεις με Ασαφή Σύνολα

Ένα ασαφές σύνολο A του X θεωρείται *κενό* (*null*) αν η συνάρτηση συμμετοχής του είναι μηδενική παντού, δηλαδή

$$A = \emptyset \text{ αν } \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Το *συμπλήρωμα* (*complement*) \bar{A} ενός ασαφούς συνόλου ορίζεται ως:

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X.$$

Πράξεις με Ασαφή Σύνολα

Ένα ασαφές σύνολο B είναι **υποσύνολο (subset)** ενός συνόλου A αν συνάρτηση συμμετοχής του B είναι μικρότερη ή ίση με αυτή του A παντού στο X , δηλαδή

$$B \subseteq A \text{ αν } \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

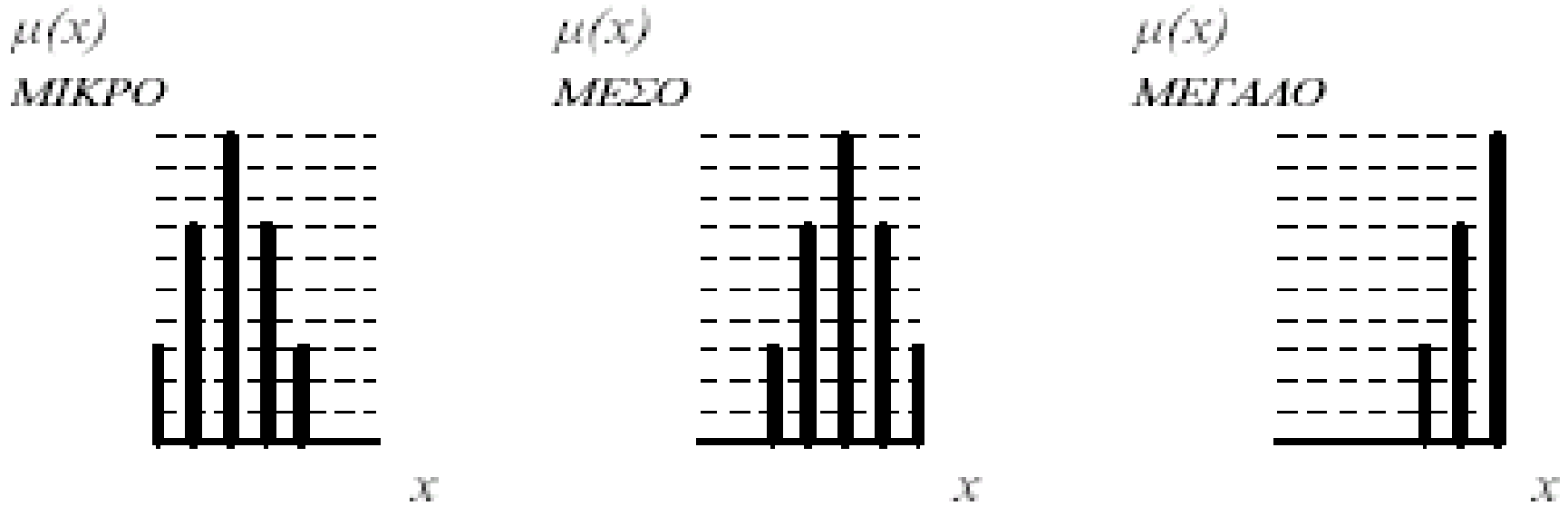
Η **ένωση (union)** δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Η **τομή (intersection)** δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Διακριτές Συναρτήσεις Συμμετοχής



Για παράδειγμα αν: $X = \{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\}$ οι διακριτές συναρτήσεις συμμετοχής για τους όρους *Μικρό*, *Μέσο* και *Μεγάλο*

$$\mu_{\text{Μικρό}}(x) = \{0,3 + 0,7 + 1 + 0,7 + 0,3 + 0 + 0\}$$

$$\mu_{\text{Μέσο}}(x) = \{0 + 0 + 0,3 + 0,7 + 1 + 0,7 + 0,3\}$$

$$\mu_{\text{Μεγάλο}}(x) = \{0 + 0 + 0 + 0 + 0,3 + 0,7 + 1\}$$



Λεκτικά Περιγράμματα

Λεκτικά περιγράμματα (*linguistic descriptors*) χρησιμεύουν στη δημιουργία ενός ευρύτερου συνόλου λεκτικών τιμών μιας λεκτικής μεταβλητής από μια μικρότερη συλλογή πρωτευόντων όρων. Χρησιμοποιώντας το περίγραμμα πολύ σε συνδυασμό με τα συνδετικά ΟΧΙ, ΚΑΙ και τον πρωτεύοντα όρο *μεγάλο*, μπορούμε να δημιουργήσουμε τα επιπλέον ασαφή σύνολα *πολύ μεγάλο*, *πάρα πολύ μεγάλο*, *ΟΧΙ πολύ μεγάλο*, *μεγάλο ΚΑΙ ΟΧΙ πολύ μεγάλο* κ.ά. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συμμετοχής σύνθετων όρων, όπως π.χ.

$$A = \text{ΟΧΙ μικρό ΚΑΙ ΟΧΙ μεγάλο}$$

η συνάρτηση συμμετοχής της οποίας είναι απλώς

$$\mu_A(x) = [1 - \mu_{\text{ΜΙΚΡΟ}}(x)] \wedge [1 - \mu_{\text{ΜΕΓΑΛΟ}}(x)].$$



Ασαφείς Σχέσεις

- Είναι ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης (π.χ. $X \times X, X \times Y \times Z$, κτλ.)
- Ένας χρήσιμος τρόπος αναπαράστασης της R , είναι σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} u_R(x_1, y_1) & u_R(x_1, y_2) & \dots & u_R(x_1, y_n) \\ u_R(x_2, y_1) & u_R(x_2, y_2) & \dots & u_R(x_2, y_n) \\ & \dots & \dots & \\ u_R(x_m, y_1) & u_R(x_m, y_1) & \dots & u_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$